Serial No. 1082083

MATHEMATICS

Time : 3 Hours] *[Full Marks : 300*

Section - I
विभाग – I

1. a) Find the linearly independent solutions of the corresponding homogeneous differential equation of the equation. **[12½]**

$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x,$

and then find the general solution of the given equation by the method of variation of parameters.

समीकरण

$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x,$

के संगत समरूप अवकल समीकरण के रैखिक रूप से स्वतंत्र हल ज्ञात कीजिए। और फिर परमानदंडों के विचरण की विधि द्वारा दिए गए समीकरण का सामान्य हल ज्ञात कीजिए।

b) Prove that distinct non-zero eigenvectors of a matrix are linearly independent. **[12½]**

सिद्ध कीजिए कि किसी मैट्रिक्स के भिन्न-भिन्न गैर-शून्य आइगेनवेक्टर रैखिक रूप से स्वतंत्र होते हैं।

c) Evaluate the following integral: **[12½]**

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{x \log \frac{1}{x}}\, dx.$$

निम्नलिखित समाकलन का मूल्यांकन कीजिए :

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{x \log \frac{1}{x}}\, dx.$$

d) For what positive value of a, the plane $ax - 2y + z + 12 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - z = 0$, and hence find the point of contact. **[12½]**

a के किस धनात्मक मान के लिए समतल $ax - 2y + z + 12 = 0$ गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - z = 0$, को स्पर्श करता है, और इस प्रकार स्पर्श बिंदु ज्ञात कीजिए।

2. a) Evaluate the following integral: **[25]**

$$\int_0^1 (2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)dx).$$

निम्नलिखित समाकलन का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 (2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)dx).$$

b) Solve following partial differential equation: **[25]**

$$(D^2 - 2DD' + D'^2)\, z = e^{x+2y} + x^3 + \sin(2x).$$

where $D = \frac{\partial}{\partial x}, D' = \frac{\partial}{\partial y}, D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, D'^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$

निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(D^2 - 2DD' + D'^2)\, z = e^{x+2y} + x^3 + \sin(2x).$$

जहाँ : $D = \frac{\partial}{\partial x}, D' = \frac{\partial}{\partial y}, D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, D'^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$

OR/अथवा

a) State Cayley- Hamilton theorem. Use this theorem to find A^{100} where **[25]**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

कैली–हैमिल्टन प्रमेय बताइए। इस प्रमेय का उपयोग करके A^{100} ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Discuss the uniform convergence of **[25]**

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \text{for } n = 1,2,3,.....$$

एकसमान अभिसरण पर चर्चा करें

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \forall x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \text{ के लिए } n = 1,2,3,.....$$

3. a) State Gauss divergence theorem. Verify this theorem for [25]

$\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$,

taken over the region bounded by

$x^2 + y^2 = 4, z = 0$ and $z = 3$.

गॉस डायवर्जेंस प्रमेय बताइए। इस प्रमेय को सत्यापित कीजिए

$\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$,

उस क्षेत्र पर कब्जा कर लिया गया है जिसकी सीमाएँ हैं

$x^2 + y^2 = 4, z = 0$ and $z = 3$.

b) Consider the matrix mapping $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, where [25]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{bmatrix}.$$

Find a basis and dimension of the image of 'A' and those of the kernel 'A'.

मैट्रिक्स मैपिंग पर विचार करें $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, जहाँ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{bmatrix}$$

'A' की छवि का आधार और आयाम ज्ञात कीजिए तथा उसके मूल 'A' का आधार और आयाम ज्ञात कीजिए।

OR/अथवा

a) A conical tent is of given capacity. For the least amount of canvas required, for it, find the ratio of its height to the radius of its base. [25]

एक शंकु के आकार के तम्बू की क्षमता दी गई है। इसके लिए आवश्यक न्यूनतम कैनवास की मात्रा ज्ञात कीजिए, और इसकी ऊँचाई और आधार की त्रिज्या का अनुपात ज्ञात कीजिए।

b) A fixed wire is in the shape of cardiod [25]

$r = a(1+\cos\theta)$,

the initial line being the downward vertices. A small ring of mass 'm' can slide on the wire and is attached to the point $r = 0$ of the cardiod by an elastic string of natural length 'a' and modulus of elasticity 4 mg. the string is released from rest when the string is horizontal. Show by using laws of conservation of energy that

$$a\theta^2(1+\cos\theta) - g\cos\theta(1-\cos\theta) = 0,$$

g being the acceleration due to gravity.

एक स्थिर तार कार्डियोइड $r = a(1+\cos\theta)$ के आकार का है, जिसका प्रारंभिक शीर्ष नीचे की ओर है। 'm' द्रव्यमान का एक छोटा वलय तार पर सरक सकता है और कार्डियोइड के बिंदु $r = 0$ से 'a' प्राकृतिक लंबाई और 4 mg प्रत्यास्थता मापांक वाली एक प्रत्यास्थ डोरी द्वारा जुड़ा हुआ है। डोरी को विराम अवस्था से छोड़ा जाता है जब डोरी क्षैतिज होती है। ऊर्जा संरक्षण के नियमों का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि

$$a\theta^2(1+\cos\theta) - g\cos\theta(1-\cos\theta) = 0,$$

g गुरूत्वाकर्षण के कारण त्वरण है।

Section - II
विभाग – II

4. a) Solve graphically: Max $Z = 4x_1 + 5x_2$ **[12½]**

Subject to : $x + y \leq 8$

$2x + y \leq 12$

$x \geq 4, y \geq 4$

How many feasible and optimal points are there? Are they same?

ग्राफ़िकल विधि से हल करें : Max $Z = 4x_1 + 5x_2$

शर्तें : $x + y \leq 8$

$2x + y \leq 12$

$x \geq 4, y \geq 4$

संभाव्य और इष्टतम बिंदुओं की संख्या कितनी है? क्या वे समान हैं?

b) Use mean value theorem to prove that : $\frac{7}{12} < \log 2.4 < \frac{7}{5}$. **[12½]**

माध्य मान प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध करें कि : $\frac{7}{12} < \log 2.4 < \frac{7}{5}$.

c) Test convergence of integrals **[12½]**

i) $\int_2^\infty \frac{\cos^2 x}{x^2} dx$

ii) $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

समाकलों के अभिसरण का परीक्षण करें

i) $\int_2^\infty \frac{\cos^2 x}{x^2} dx$

ii) $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

d) If G is a finite cyclic group of order n generated by a, then order of any element a^k is $n / gcd\ (n,k)$. **[12½]**

यदि G, a द्वारा उत्पन्न n क्रम का एक परिमित चक्रीय समूह है, तो किसी भी तत्व a^k का क्रम $n / gcd\ (n,k)$ है।

5. a) Evaluate using contour integration: [25]

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5-4\cos(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

समोच्च एकीकरण का उपयोग करके मूल्यांकन करें :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5-4\cos(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

b) Find the solution of system of equations: [25]

$$2x + y + z = 5$$
$$3x + 5y + 2z = 15$$
$$2x + y + 4z = 8$$

Set up Gauss-Seidel and iterate 3 times starting with initial vector $X^{(0)} = 0$. Also find exact solution and compare with iterated solution.

निम्नलिखित समीकरणों की प्रणाली का हल ज्ञात कीजिए :

$$2x + y + z = 5$$
$$3x + 5y + 2z = 15$$
$$2x + y + 4z = 8$$

गॉस–सीडेल विधि स्थापित कीजिए और प्रारंभिक सदिश $X^{(0)} = 0.$ से शुरू करते हुए तीन बार पुनरावृति कीजिए। साथ ही, सटीक हल ज्ञात कीजिए और पुनरावृति हल से तुलना कीजिए।

OR/अथवा

a) If for a 2-dimensional flow, the velocity p is given by [25]

$$\varphi(x, y) = x(2y - 1).$$

Determine stream function for this flow at (4, 5).

यदि किसी द्वि–आयामी प्रवाह के लिए वेग p इस प्रकार दिया गया है :

$$\varphi(x, y) = x(2y - 1).$$

बिंदु (4, 5) पर इस प्रवाह के लिए स्ट्रीम फंक्शन ज्ञात कीजिए।

b) The following integral is given [25]

$$\int_{0.1}^{1.3} 5x\, e^{-2x} dx.$$

Use two-point Gauss quadrature rule to estimate the value of the integral and also find the absolute relative true error.

निम्नलिखित समाकलन दिया गया है

$$\int_{0.1}^{1.3} 5x\, e^{-2x} dx.$$

इस समाकलन के मान का अनुमान लगाने के लिए दो–बिंदु गॉस चतुर्भुज नियम का प्रयोग करें और साथ ही निरपेक्ष सापेक्ष वास्तविक त्रुटि ज्ञात करें।

6. a) If $u = \sec^{-1} \dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$. Show that [25]

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2\cot(u).$$

यदि $u = \sec^{-1} \dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$. है, तो दिखाइए कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2\cot(u).$$

b) Show that the function: [25]

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

is continuous and differentiable at (0, 0).

दिखाइए कि फलन :

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(0, 0) पर सतत और अवकलनीय है।

OR/अथवा

a) Evaluate: [25]

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^3}dz,$$

where C is the circle $x^2+(y-1)^2=1$ oriented positively.

मूल्यांकन कीजिए :

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^3}dz,$$

जहां C धनात्मक दिशा में उन्मुख वृत्त $x^2+(y-1)^2=1$ है।

b) Form a partial differential equation by eliminating arbitrary function from the equation [25]

$$\phi(x+y+z, x^2+y^2-z^2)=0.$$

समीकरण से किसी भी फलन को हटाकर आंशिक अवकल समीकरण बनाइए :

$$\phi(x+y+z, x^2+y^2-z^2)=0.$$