Student's Copy

Serial No.	3000080

MATHEMATICS

Time : 3 Hours] *[Full Marks : 300*

Section - I
विभाग – I

1. a) Let $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be the linear transformation defined by **[12½]**

$$L(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha+\beta-\gamma,\alpha+\beta+\gamma,\beta-\gamma).$$

Find the matrix L relative to basis B = {(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 1)}. Also, find the dimension of the null space of L.

मान लें $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ रैखिक परिवर्तन है जिसे इस प्रकार परिभाषित किया गया है

$$L(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha+\beta-\gamma,\alpha+\beta+\gamma,\beta-\gamma).$$

आधार B = {(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 1)} के सापेक्ष मैट्रिक्स L ज्ञात कीजिए। इसके अलावा, L के शून्य स्थान का आयाम भी ज्ञात कीजिए।

b) Determine whether the limit exists or not. If exists, find its value. **[12½]**

$$\lim_{x\to a}\left(5+\frac{2x}{9}-\frac{6x^2}{a^2}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$$

निर्धारित करें कि सीमा मौजूद है या नहीं। यदि मौजूद है, तो उसका मान ज्ञात करें।

$$\lim_{x\to a}\left(5+\frac{2x}{9}-\frac{6x^2}{a^2}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$$

c) Find the points on given sphere $x^2+y^2+z^2=2$ which are nearest and farthest from the point (3, 4, 5). **[12½]**

दिए गए गोले $x^2+y^2+z^2=2$ पर वे बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 4, 5) से निकटतम तथा सबसे दूर हैं।

3000080

d) If u is scalar function of r and u', u'' denote its first and second derivative w. r. t. r then $\nabla^2 u = u'' + \frac{2u'}{r}$. **[12½]**

यदि u, r का अदिश फलन है, u', u'' इसके प्रथम और द्वितीय अवकलज को r के संबंध में दर्शाता है तो $\nabla^2 u = u'' + \frac{2u'}{r}$.

2. a) Solve the differential equation $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \sin(\log x)$. **[25]**

अंतर समीकरण हल करें $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \sin(\log x)$.

b) If $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined as **[25]**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; (x,y) \neq (0,0) \\ 0; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

If f is continuous at (0, 0)? Compute partial derivatives of f at (0, 0) of exist.

यदि $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **को इस प्रकार परिभाषित किया जाए**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; (x,y) \neq (0,0) \\ 0; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

यदि f (0, 0) पर सतत है? यदि मौजूद हो तो (0, 0) पर f के आंशिक व्युत्पन्न की गणना करें।

OR/**अथवा**

a) Find the characteristic equation of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. **[25]**

मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ **का अभिलक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए।**

b) Show that $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **[25]**

दर्शाइए कि $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3. a) Verify Gauss's Theorem for $\vec{F} = \left(x^3 - yz\right)\hat{i} - 2x^2y\hat{j} + \hat{k}$, if $\overrightarrow{OA} = a\hat{i}$, $\overrightarrow{OB} = a\hat{j}$ and $\overrightarrow{OC} = a\hat{k}$ forms the coterminous edges of the cube and S denotes the surface of the cube. **[25]**

$\vec{F} = \left(x^3 - yz\right)\hat{i} - 2x^2y\hat{j} + \hat{k}$ के लिए गॉस के सिद्धांत को सत्यापित करें, यदि $\overrightarrow{OA} = a\hat{i}$, $\overrightarrow{OB} = a\hat{j}$ और $\overrightarrow{OC} = a\hat{k}$ घन के सहवर्ती किनारों का निर्माण करता है और S घन की सतह को दर्शाता है।

b) Let (X, d) and (Y, ρ) be metric spaces, f: X $\to$ Y be a mapping. Assume X is compact, then f is continuous iff f is uniformly continuous. **[25]**

मान लें कि (X, d) और (Y, ρ) मैट्रिक स्पेस हैं, f : X $\to$ Y एक मैपिंग है। मान लें कि X कॉम्पैक्ट है, तो f निरंतर है यदि और केवल यदि f समान रूप से निरंतर है।

OR/अथवा

a) Show that the torsion τ of a space curve is given by $\tau = \frac{B \cdot T \times T''}{|T'|^2}$, where T is the tangent vector, N is the normal vector and B is the binormal vector. **[25]**

दर्शाइए कि अंतरिक्ष वक्र का मरोड़ $\tau, \tau = \frac{B \cdot T \times T''}{|T'|^2}$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ T स्पर्शज्या सदिश है, N सामान्य सदिश है और B द्विसामान्य सदिश है।

b) A particle on a smooth horizontal table is attached to a string passing through a small hole in the table and carries an equal particle hanging vertically if at time t the particle is distant r from the hole and the string makes an angle θ with some fixed line in the table. Obtain Lagrange's equation of motion of the system in terms of r, θ. **[25]**

एक चिकनी क्षैतिज मेज पर एक कण मेज में एक छोटे छेद से गुजरने वाली एक डोरी से जुड़ा हुआ है और एक समान कण को ऊर्ध्वाधर रूप से लटकाए हुए है यदि समय t पर कण छेद से r दूर है और डोरी मेज में किसी स्थिर रेखा के साथ θ कोण बनाती है। r, θ के पदों में प्रणाली की गति का लैग्रेंज समीकरण प्राप्त करें।

3000080 3000080 3000080

Section - II
विभाग – II

4. a) Solve the partial differential equation $\left(y^2+z^2-x^2\right)p-2xyq+2xz=0$, where $p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}$. **[12½]**

निम्नलिखित आंशिक अंतर समीकरण को हल करें $\left(y^2+z^2-x^2\right)p-2xyq+2xz=0$, **जहाँ** $p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

b) Calculate the first four moments of the following distribution about the mean and hence find β_1 and β_2. **[12½]**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	8	28	56	70	56	28	8	1

निम्नलिखित वितरण के माध्य के बारे में पहले चार आघूर्णों की गणना करें और इस प्रकार β_1 **और** β_2 **ज्ञात करें।**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	8	28	56	70	56	28	8	1

c) Prove that every group is isomorphic to a permutation group. **[12½]**

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक समूह एक क्रमचय समूह के समरूप होता है।

d) For an incompressible fluid flow, two components of velocity (u, v, w) are given by $u=x^2+2y^2+3z^2, v=x^2y-y^2z+zx$. Determine the third component w so that they satisfy equation of continuity. Also, find z – component of acceleration. **[12½]**

एक असंपीडनीय द्रव प्रवाह के लिए, वेग (u, v, w) **के दो घटक** $u=x^2+2y^2+3z^2, v=x^2y-y^2z+zx$ **द्वारा दिए गए हैं। तीसरा घटक** w **निर्धारित करें ताकि वे निरंतरता के समीकरण को संतुष्ट करें। साथ ही, त्वरण का** z – **घटक ज्ञात करें।**

3000080 3000080 3000080

5. a) Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a function satisfying the equation $|f(x)-f(y)|\le|x-y|^a; a>0$. Find the value of a for which $f(x)$ is a constant function. **[25]**

मान लीजिए $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ एक फ़ंक्शन है जो समीकरण $|f(x)-f(y)|\le|x-y|^a; a>0$ को संतुष्ट करता है। a का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $f(x)$ एक स्थिर फ़ंक्शन है।

b) Discuss the uniform convergence of the sequence $\{f_n\}$, where $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ given by $f_n(x)=\frac{x}{e^{nx^3}}$. **[25]**

अनुक्रम $\{f_n\}$ के समान अभिसरण पर चर्चा करें, जहाँ $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ जो $f_n(x)=\frac{x}{e^{nx^3}}$ द्वारा दिया गया है।

OR/अथवा

a) Let X be a random variable with the following probability distribution: **[25]**

x	–3	6	9
P(X = x)	1/6	1/2	1/3

Find E(X) and E(X^2) and using laws of expectation, evaluate $E(2X+1)^2$.

मान लीजिए X एक यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता वितरण निम्नलिखित है:

x	–3	6	9
P(X = x)	1/6	1/2	1/3

E(X) और $E(X^2)$ ज्ञात करें और अपेक्षा के नियमों का उपयोग करते हुए, $E(2X+1)^2$ का मूल्यांकन करें।

b) Let the velocity of an incompressible fluid at a point (x, y, z) is given by: $V=\left(\frac{2x}{r^4},\frac{2y}{r^4},\frac{2z}{r^4}\right)$, where $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ is the radial distance from the origin. Check whether liquid motion is possible. Also, find the velocity potential and determine the streamlines of flow. **[25]**

मान लीजिए कि एक बिंदु (x, y, z) पर एक असंपीडनीय द्रव का वेग इस प्रकार दिया गया है: $V=\left(\frac{2x}{r^4},\frac{2y}{r^4},\frac{2z}{r^4}\right)$ जहाँ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ मूल बिन्दु से रेडियल दूरी है। जाँच करें कि क्या द्रव की गति संभव है। साथ ही, वेग क्षमता ज्ञात करें और प्रवाह की धारा रेखाएँ निर्धारित करें।

6. a) The velocity of a train that starts from rest is given in the following table. The time is in minutes and velocity is in km/hr.

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	16	28.8	40	46.4	51.2	32.0	17.6	8	3.2	0

Estimate approximately the total distance run in 30 minutes by using composite Simpson's 1/3 rule. **[25]**

विरामावस्था से चलने वाली एक रेलगाड़ी का वेग निम्न तालिका में दिया गया है। समय मिनटों में है तथा वेग किलोमीटर/घंटा में है।

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	16	28.8	40	46.4	51.2	32.0	17.6	8	3.2	0

संयुक्त सिम्पसन के 1/3 नियम का उपयोग करके 30 मिनट में तय की गई कुल दूरी का अनुमान लगाएं।

b) Find the initial basic feasible solution to the following problem by Vogel's approximation method. Also, find its optimum solution and the minimum transportation cost. **[25]**

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	6	4	1	5	14
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
	6	10	15	4	

वोगेल सन्निकटन विधि द्वारा निम्नलिखित समस्या का प्रारंभिक बुनियादी संभव समाधान ज्ञात करें। साथ ही, इसका इष्टतम समाधान और न्यूनतम परिवहन लागत भी ज्ञात करें।

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	6	4	1	5	14
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
	6	10	15	4	

OR/अथवा

a) Solve the non-linear programming problem **[25]**

Optimize $z = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$

Subject to the constraints

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

गैर–रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या को हल करें

अनुकूलन $z = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$

बाधाओं के अधीन

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

b) Find all the singularities of function $f(z) = \dfrac{e^z}{z \sin z}$ and find the integral $\oint_{\left|z-\frac{3}{2}\right|<2} \dfrac{e^z}{z \sin z}$. **[25]**

फ़ंक्शन $f(z) = \dfrac{e^z}{z \sin z}$ **की सभी विलक्षणताएँ ज्ञात करें और समाकल** $\oint_{\left|z-\frac{3}{2}\right|<2} \dfrac{e^z}{z \sin z}$ **ज्ञात करें।**

✤✤✤✤

3000080 3000080 3000080 3000080